RBT
RED BUILDING TEAM

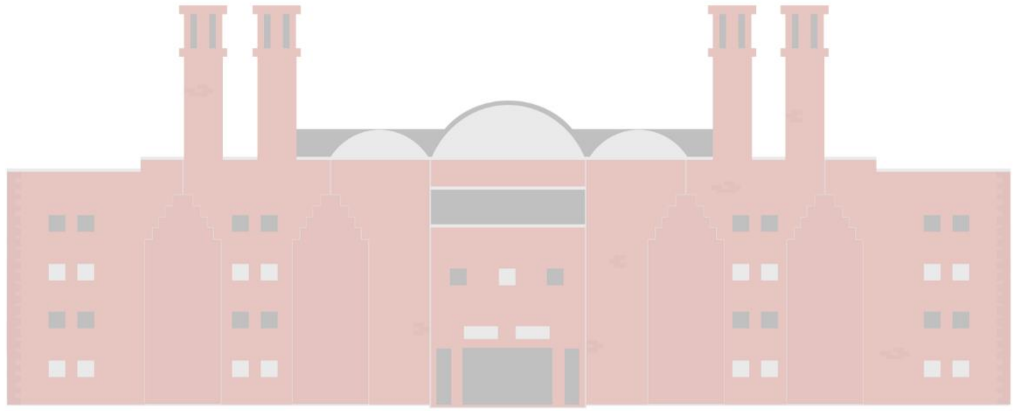
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التَحليل العَددِي

المحاضرة العاشرة

6 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/٥

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

من المثال الموجود في المحاضرة السابقة :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y + 0.5 = 0 & (١) \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

من المعادلة(١) نضيف للطرفين $(-2x)$ اما المعادلة(2) نضيف للطرفين $(-11y)$ فاصبح لدينا صيغ التكرار وذلك بعزل X من المعادلة (١) وY من المعادلة (2)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{-x_n^2 + 4x_n + y_n - 0.5}{2} = G_1(x_0, y_0) \\ y_{n+1} = \dfrac{-x_n^2 - 4y_n^2 + 11y + 4}{11} = G_2(x_0, y_0) \\ (x_0, y_0) = (2,0) \Longrightarrow \text{هي نقطة البدء وتكون معطاة} \end{cases}$$

ويمكن التخمين الاولي للحل :

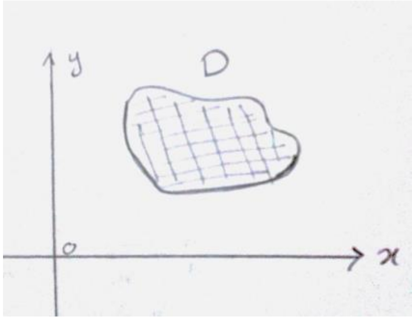
n	x_n	y_n
0	2.00	0.00
1	1.75	0.00
2	1.71875	0.0852273
:		
8	1.903595	0.3160782
:		
12	1.900924	0.3112267
:		
20	1.900677	0.3112196
:		
24	1.900677	0.3112186

فنجد ان النقطة تتقارب من الحل الثاني للجملة فهي النقطة الثابتة.

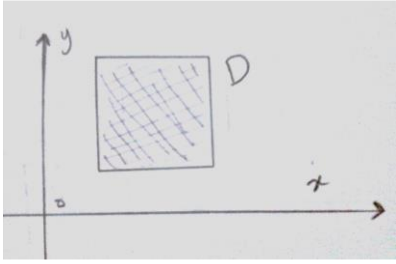
•شرط تقارب طريقة التكرار لحل جملة لاخطية:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

فمن الممكن ان تكون المنطقة على شكل منحني كما في الشكل $(x, y) \in D \subseteq R^2$



لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي



او ان تكون المنطقة على شكل مربع كما في الشكل :

$$D = [a,b].[b.c] \subseteq R^2$$

نقوم بإيجاد دالتين g_1 وg_2 وذلك بعزل X و Y :

$$x = g_1(x,y), \qquad y = g_2(x,y)$$

ونفرض ان المشتقات الجزئية لـ g_1وg_2 موجودة على D

وبفرض ان (p,q) الحل من D ويحقق:

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| < 1 \qquad \forall (x,y) \in D \\ \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| < 1 \end{cases}$$

ان أي اختيار لـ (x_0, y_0) من D يقود الى متتالية تقارب من الحل .

نعود للمثال السابق :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y + 0.5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{x^2 - y + 0.5}{2} = g_1(x,y)$$

$$y = \frac{-x^2 - 4y^2 + 8y + 4}{8} = g_2(x,y)$$

ان حالة التقارب $(x_0, y_0) = (0,1)$ نفرض مجال شرط أن تنتمي فيه النقطة السابقة وليكن :

$$D\begin{cases} -0.5 < x < 0.5 \\ 0.5 < y < 1.5 \end{cases}$$

ان النقطة $(0,1) \in D$ اذن الحل موجود في D

نقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ g_1وg_2 : $\qquad \frac{\partial Y_1}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{1}{2}$

ونعوض في الشرط التالي $\qquad |x| + \left|-\frac{1}{2}\right| < 1 \ldots *$

ملاحظة: لمعرفة تحقق العلاقة * ناخذ اعلى قيمة في المجال وهي القيمة التي لايمكن الوصول اليها

ونعوض لكل من X, Y (وفي مثالنا هنا نعوض قيمة xبـ 0.5 وقيمة الـ yبـ1.5)

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = -\frac{x}{4}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 1 - Y$$

$$\left|-\frac{x}{4}\right| + |1-Y| < 1$$

الشرط محققة $\forall (x,y) \in D$ وهذا مايفسر التقارب من الحل اما الحالة الثانية فقد أدت الى متتالية متباعدة لأن (x_0, y_0) ليس من D

•شرط تقارب طريقة التكرار لحل جملة لاخطية

ليكن لدينا المعادلات التالية:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \\ F_3(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad , \quad \Omega \subseteq R^3$$

وتكون الدوال التكرارية هي:

$$\begin{cases} x = g_1(x,y,z) \\ y = g_2(x,y,z) \\ z = g_3(x,y,z) \end{cases}$$

أما الشكل العام للدوال :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = g_2(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = g_3(x_n, y_n, z_n) \\ n = 0,1,2, \dots\dots.. \\ (x_0, y_0, z_0) \text{معطاة} \end{cases}$$

وليكن لدينا مجموعة النقاط $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty}$

فيكون: $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (p,q,r)$

فيكون (p,q,r) نقطة ثابتة لـ: g_1 ، g_2 ، g_3 اذ كانت :

$$p = g_1(p,q,r)$$
$$q = g_2(p,q,r)$$
$$r = g_3(p,q,r)$$

سوف نبحث عن شروط تقارب المعادلات :

$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ التي تكون $\Omega \subseteq R^3$ "منطقة فراغية" وال g_1, g_2, g_3 دوال التكرار فيكون:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_3}{\partial y}, \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$ المشتقات الجزئية موجودة على Ω

إن Ω تتضمن الحل (p,q,r) إذا تحقق الشرط التالي:

rbd
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial z} < 1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial z} < 1 \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} < 1 \\ \forall (x,y,z) \in \Omega \end{cases}$$

عندئذٍ إن أيّ اختيار لـ (x_0, y_0, z_0) من Ω يعود إلى مُتتالية متقاربة من النقطة الثابتة (p, q, r)

طريقة تكرار غاوس – سايدل في حل جملة غير خطيّة:

$f_1 = 0 \;,\quad f_2 = 0 \;,\quad f_3 = 0$ جملة غير خطيّة

صيغ التكرار في طريقة التكرار

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = g_2(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = g_3(x_n, y_n, z_n) \\ n = 0,1,2, \dots \dots .. \\ (x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

تعديل غاوس – سايدل:

ملاحظة: تتميز طريقة غاوس بأنها أسرع وأسهل من طريقة التكرار قد يأتي بالامتحان سؤال بعلامتين.

في هذه الطريقة نقوم بحساب الـ x_{n+1} ومن ثم نعوضها في الـ g_2 لحساب الـy_{n+1} وأيضا لحساب الـz_{n+1} نعوض كل من الـx_{n+1} والـy_{n+1} .

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = g_2(x_{n+1}, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = g_3(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n) \\ n = 0,1,2, \dots \dots .. \\ (x_0, y_0, z_0) \text{ معطاة} \end{cases}$$

طريقة نيوتن لحل جملة معادلات لا خطيّة:

"طريقة لعدّة مُتغيّرات"

ليكن لدينا: $f(x) = 0$ والـ x_0 معطاة

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x_n)}$ حيث : $n = 0,1,2, \dots \dots$

وكما نعلم أن نشر تايلور هو من الشكل:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+(x-x_1)^2f''(x_0)+\cdots$$

وبالتقريب الخطي :أي إهمال الحدود التي من الدرجة الثانية فما فوق لأن قيمتها تكون صغيرة نسبيا. نجد:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+O(h^2)$$

ملاحظة : إن الرمز O هو الشعاع الصفري المستخدم في معادلاتنا.

ومن ثم تتحول المساواة في المعادلة الى تقريب وبما أن الـ $f(x)=0$ نعوضها في المعادلة فيكون الآتي :

$$O\approx f(x_0)+(x-x_0)\,f'(x_0)$$

ويكون قانون إيجاد الحل x_1 كالأتي :
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

مثال: سنأخُذ حالة ثلاث مُعادلات بـثلاث مجاهيل:

ليكُن لدينا
$$\begin{cases}f_1(u,v,\omega)=0\\f_2(u,v,\omega)=0\\f_3(u,v,\omega)=0\end{cases}$$

فإن (u,v,ω) هي التي سنجدها وسنفرض الشعاع X يساوي $X=(u,v,\omega)$ "إن الـ X كبيرة لأنها عبارة عن شعاع"

٢.سنقوم بالترميزات الجديدة التالية:

$$f(X)=\big(f_1(X),f_2(X),f_3(X)\big)$$

ولحساب مشتق التابع $f(X)$ نلجأ الى المصفوفة اليعقوبية لحسابه نظرا بأن الـ $f(X)$ تابع شعاعي لثلاث متغيرات .

$$DF(X)=\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial u & \partial f_1/\partial v & \partial f_1/\partial\omega\\ \partial f_2/\partial u & \partial f_2/\partial v & \partial f_2/\partial\omega\\ \partial f_3/\partial u & \partial f_3/\partial v & \partial f_3/\partial\omega\end{bmatrix}$$

٣.كيف سيكون في حال نشر تايلور؟

ستكون معادلة الـ $F(X)$ وفق منشور تايلور عند الـ X_0 شعاع :

$$F(X)=F(X_0)+DF(X_0)(X-X_0)+O(X-X_0)^2$$

قمنا بإهمال الحدود التي من الدرجة الثانية فما فوق وذلك باعتبار أن الفروقات صغيرة فهي تؤول الى شعاع يقارب الشعاع الصفري.

٤-إذا كان الـ r حل للمعادلة فستكون من الشكل :

$$O\approx F(X_0)+DF(X_0)(r-X_0)\ \ldots\ldots\ldots *$$

لايمكن حساب الحل $X_1=r$ من خلال القانون التالي وذلك لعدم امكانية تقسيم شعاع الـ$F(X_0)$ على مصفوفة $DF(X_0)$ كالأتي :

$$X_1=X_0-\frac{F(X_0)}{DF(X_0)}$$

يجب أن نقوم ببعض الحيل لتقودنا إلى متتالية.

نضرب طرفي المعادلة * بمقلوب المصفوفة اليعقوبية بعد نقل الـ $F(X_0)$ الى الطرف الآخر فيكون الآتي:

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$-DF(X_0)^{-1}F(X_0) \approx r - X_0$$
$$X_1 = X_0 - DF(X_0)^{-1}.F(X_0)$$

فيكون الشكل العام : $X_{n+1} = X_k - DF(X_k)^{-1}.F(X_k)$ حيث : $k = 0,1,2,\dots\dots$ و $X_0 = (u_0, v_0, \omega_0)$

*لكن نحن امام مشكلة وهي أن هذا الحل :

١.مزعج حسابيا.

٢.غير متاح دائما مقلوب مصفوفة:

للتخلص من المقلوب تم اقتراح طريقة نيوتن

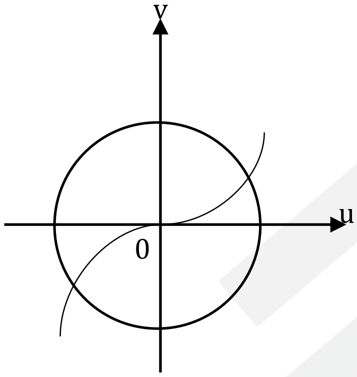
$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k - S \\ DF(X_k).S = F(X_k) \\ k = 0,1,2,\dots\dots \\ X_0 \text{ مُعطاة} \end{cases}$$

"أسلوب آخر"

$$\begin{cases} DF(X_k).S = -F(X_k) \\ X_{k+1} = X_k + S \\ k = 0,1,2,\dots\dots \\ X_0 \text{ مُعطاة} \end{cases}$$

مثال: أوجد الحل بطريقة نيوتن للمعادلات غير الخطية لعدة متغيرات

$$\begin{cases} v - u^3 = 0 \\ u^2 + v^2 - 1 = 0 \\ x_0 = (1,2) \end{cases}$$



لحساب المصفوفة اليعقوبية

$$DF(X) = \begin{bmatrix} -3u^2 & 1 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$$

ولدينا القانون التالي لمعرفة الحل:

$$DF(X_0).S = -F(X_0) \dots\dots\dots *$$

ولدينا:

$$F(x) = \begin{bmatrix} v - u^2 \\ u^2 + v^2 - 1 \end{bmatrix}$$

نعوض في *

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow S = (0,-1)$$
$$X_1 = X_0 + S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$